



Devoir à la maison N°3 (2010)

EXERCICE N°: 1 (4 points)

Une machine fabrique des fers cylindriques d'un diamètre théorique de 25 mm. On contrôle le fonctionnement de la machine en relevant un échantillon de 200 pièces au hasard.

Les mesures des diamètres ont donné les résultats suivants :

Diamètre En (mm)	24,0	24,5	24,8	25,1	25,4	25,6	25,8	26,0
Effectif	5	45	80	30	10	15	10	5

1°) Calculer la médiane, le premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3 .

2°) Représenter le diagramme en boîte de la série.

3°) Calculer la moyenne \bar{x} et l'écart-type σ de la série.

4°) La production de la machine jugée bonne si la série des mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :

La moyenne $\bar{x} \in [24,9 ; 25,1]$

$\sigma < 0,45$.

Au moins 90% de l'effectif total figure dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$.

La production de la machine est-elle bonne.

EXERCICE N°: 2 (6 points)

Un sac contient dix jetons indiscernables au toucher : { 5 rouges marqués -1 , -1 , 0 , 1 , 2 et 5 blancs marqués -1 , 0 , 1 , 1 , 1 }.

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Une épreuve consiste à tirer simultanément deux jetons du sac.

a-/ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur ».

B : « Obtenir deux jetons de même numéro ».

C : « Obtenir un seul jeton rouge et un seul porte le numéro 1 ».

D : « Le produit des deux numéros des deux jetons tirés est strictement positif »

b-/ Calculer $P(A \cap D)$ et $P(A \cup D)$

2°) On tire successivement et avec remise 4 jetons de l'urne.

On considère l'événement S : « obtenir un jeton rouge »

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « S est réalisé au moins une fois ».

F : « S est réalisé pour la première fois à la troisième tirage ».

G : « S est réalisé au plus une fois ».

3°) On effectue un tirage successif de deux jetons de la manière suivante : on tire un jeton si sa couleur est blanc on la remet dans l'urne et on tire un deuxième jeton. Si non on la garde à l'extérieur et on effectue le deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'avoir deux jetons de couleurs différents ?



EXERCICE N°: 3 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$. On considère les points $A(2 ; 0 ; 0)$
 $B(1 ; 1 ; 4)$, $C(0 ; 0 ; 4)$ et $D(-1 ; 1 ; -1)$.

- 1°) a-/ Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P.
 b-/ Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $2x - 2y + z - 4 = 0$.
 c-/ En déduire que A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- 2°) a-/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire à P.
 b-/ Soit $M(x , y , z)$ un point de P.
 Déterminer les coordonnées de M pour que la distance DM soit minimale.
 c-/ Soit $F(1 , -1 , 0)$. Vérifier que le quadrilatère ABCF est un rectangle.
- 3°) Soit Q le plan d'équation : $x - y - 4z + d = 0$ où d est un paramètre réel.
 a-/ Montrer que Q est perpendiculaire à P.
 b-/ Déterminer le réel d pour que la droite Δ soit incluse dans Q.
- 4°) Dans la suite on prend $d = -2$
 a-/ Vérifier que $A \in Q$.
 b-/ En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ' intersection des plans P et Q.
 c-/ Montrer alors que la droite (BC) est parallèle à Q.
- 5°) Montrer que le plan (CDF) est perpendiculaire à chacun des plans P et Q.

EXERCICE N°: 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $] 0 ; + \infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x}$.

- 1°) a-/ Dresser le tableau de variations de f.
 b-/ Calculer $f(\sqrt{5})$
- 2°) Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 2\sqrt{5} \\ \forall n \in \mathbb{N} , u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- a-/ Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq \sqrt{5}$
 b-/ Etudier la monotonie de la suite u
- 3°) Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$
- a-/ Montrer que pour tout entier naturel n on a : $v_{n+1} = (v_n)^2$
 b-/ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 c-/ En déduire la limite de la suite v.
 4°) Exprimer u_n en fonction de v_n puis calculer la limite de la suite u.

